CHƯƠNG III: DÃY SỐ – CẤP SỐ

I. Phương pháp qui nạp toán học

Để chứng minh mệnh đề chứa biến A(n) là một mệnh đề đúng với mọi giá trị nguyên dương n, ta thực hiện như sau:

- *Bước 1: Kiểm tra mệnh đề đúng với n = 1.*
- *Bước 2: Giả thiết mệnh đề đúng với số nguyên dương n = k tuỳ ý (k ≥ 1), chứng minh rằng mệnh đề đúng với n = k + 1.*

Chú ý: *Nếu phải chứng minh mệnh đề A(n) là đúng với với mọi số nguyên dương n ≥ p thì:*

+ Ở bước 1, ta phải kiểm tra mệnh đề đúng với n = p;

+ Ở bước 2, ta giả thiết mệnh đề đúng với số nguyên dương bất kì n = k ≥ p và phải chứng minh mệnh đề đúng với n = k + 1.

Bài 1: Chứng minh rằng với mọi n ∈ N*, ta có:

a) $1 + 2 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

b) $1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

c) $1^3 + 2^3 + ... + n^3 = \left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$

d) $1.4 + 2.7 + ... + n(3n+1) = n(n+1)^2$

e) $1.2 + 2.3 + ... + n(n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$

f) $\dfrac{1}{1.2} + \dfrac{1}{2.3} + ... + \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$

Bài 2: Chứng minh rằng với mọi n ∈ N*, ta có:

a) $2^n > 2n+1$ (n ≥ 3)

b) $2^{n+2} > 2n+5$

c) $1 + \dfrac{1}{2^2} + ... + \dfrac{1}{n^2} < 2 - \dfrac{1}{n}$ (n ≥ 2)

d) $\dfrac{1}{2}.\dfrac{3}{4}...\dfrac{2n-1}{2n} < \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$

e) $1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + ... + \dfrac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$

f) $\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + ... + \dfrac{1}{2n} > \dfrac{13}{24}$ (n > 1)

Bài 3: Chứng minh rằng với mọi n ∈ N*, ta có:

a) $n^3 + 11n$ chia hết cho 6.

b) $n^3 + 3n^2 + 5n$ chia hết cho 3.

c) $7.2^{2n-2} + 3^{2n-1}$ chia hết cho 5.

d) $n^3 + 2n$ chia hết cho 3.

e) $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ chia hết cho 7.

f) $13^n - 1$ chia hết cho 6.

Bài 4: Chứng minh rằng số đường chéo của một đa giác lồi n cạnh là $\dfrac{n(n-3)}{2}$.

Bài 5: Dãy số (a_n) được cho như sau: $a_1 = \sqrt{2},\ a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ với n = 1, 2, ...

Chứng minh rằng với mọi n ∈ N* ta có: $a_n = 2\cos\dfrac{\pi}{2^{n+1}}$.

II. Dãy số

1. Dãy số

$$u : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$$
$$n \mapsto u(n)$$

Dạng khai triển: $(u_n) = u_1, u_2, ..., u_n, ...$

2. Dãy số tăng, dãy số giảm

- (u_n) *là dãy số tăng* $\Leftrightarrow u_{n+1} > u_n$ *với* $\forall n \in N^*$.

  $\Leftrightarrow u_{n+1} - u_n > 0$ *với* $\forall n \in N^* \Leftrightarrow \dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ *với* $\forall n \in N^*$ $(u_n > 0)$.

- (u_n) *là dãy số giảm* $\Leftrightarrow u_{n+1} < u_n$ *với* $\forall n \in N^*$.

  $\Leftrightarrow u_{n+1} - u_n < 0$ *với* $\forall n \in N^* \Leftrightarrow \dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ *với* $\forall n \in N^*$ $(u_n > 0)$.

3. Dãy số bị chặn

- (u_n) *là dãy số bị chặn trên* $\Leftrightarrow \exists M \in R$: $u_n \le M$, $\forall n \in N^*$.
- (u_n) *là dãy số bị chặn dưới* $\Leftrightarrow \exists m \in R$: $u_n \ge m$, $\forall n \in N^*$.
- (u_n) *là dãy số bị chặn* $\Leftrightarrow \exists m, M \in R$: $m \le u_n \le M$, $\forall n \in N^*$.

Bài 1: Hãy viết 5 số hạng đầu của dãy số (u_n) cho bởi:

a) $u_n = \dfrac{2n^2-1}{n^2+1}$ b) $u_n = \dfrac{n+(-1)^n}{2n+1}$ c) $u_n = \dfrac{n-1}{\sqrt{n^2+1}}$

d) $u_n = \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$ e) $u_n = n + \cos^2 n$ f) $u_n = \dfrac{(n+1)!}{2^n}$

Bài 2: Hãy viết 5 số hạng đầu của dãy số (u_n) cho bởi:

a) $u_1 = 2,\ u_{n+1} = \dfrac{1}{3}(u_n + 1)$ b) $u_1 = 15,\ u_2 = 9,\ u_{n+2} = u_n - u_{n+1}$

c) $u_1 = 0,\ u_{n+1} = \dfrac{2}{u_n^2 + 1}$ d) $u_1 = 1,\ u_2 = -2,\ u_{n+2} = u_{n+1} - 2u_n$

Bài 3: Hãy viết 5 số hạng đầu của dãy số (u_n), dự đoán công thức số hạng tổng quát u_n và chứng minh công thức đó bằng qui nạp:

a) $u_1 = 1,\ u_{n+1} = 2u_n + 3$ b) $u_1 = 3,\ u_{n+1} = \sqrt{1+u_n^2}$ c) $u_1 = 3,\ u_{n+1} = 2u_n$

d) $u_1 = -1,\ u_{n+1} = 2u_n + 1$ e) $u_1 = 1,\ u_{n+1} = u_n + 7$ e) $u_1 = \dfrac{5}{4},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + 1}{2}$

Bài 4: Xét tính tăng, giảm của các dãy số (u_n) cho bởi:

a) $u_n = \dfrac{2n+1}{3n-2}$ b) $u_n = \dfrac{4^n - 1}{4^n + 5}$ c) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+2}$

d) $u_n = \dfrac{n^2+n+1}{n^2+1}$ e) $u_n = n + \cos^2 n$ f) $u_n = \dfrac{2-n}{\sqrt{n}}$

Bài 5: Xét tính bị chặn trên, bị chặn dưới, bị chặn của các dãy số (u_n) cho bởi:

a) $u_n = \dfrac{2n+3}{n+2}$ b) $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$ c) $u_n = n^2 + 4$

d) $u_n = \dfrac{n^2+2n}{n^2+n+1}$ e) $u_n = \dfrac{n}{\sqrt{n^2+2n}+n}$ f) $u_n = (-1)^n \cos\dfrac{\pi}{2n}$

III. Cấp số cộng

1. Định nghĩa: *(u_n) là cấp số cộng* $\Leftrightarrow u_{n+1} = u_n + d, \ \forall n \in N^*$ *(d: công sai)*

2. Số hạng tổng quát: $u_n = u_1 + (n-1)d$ *với* $n \geq 2$

3. Tính chất các số hạng: $u_k = \dfrac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2}$ *với* $k \geq 2$

4. Tổng *n* số hạng đầu tiên: $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n = \dfrac{n(u_1 + u_n)}{2} = \dfrac{n\left[2u_1 + (n-1)d\right]}{2}$

Bài 1: Trong các dãy số (u_n) dưới đây, dãy số nào là cấp số cộng, khi đó cho biết số hạng đầu và công sai của nó:

a) $u_n = 3n - 7$ b) $u_n = \dfrac{3n+2}{5}$ c) $u_n = n^2$

d) $u_n = 3^n$ e) $u_n = \dfrac{7-3n}{2}$ f) $u_n = \dfrac{n}{2} - 1$

Bài 2: Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng, biết:

a) $\begin{cases} u_1 + u_5 - u_3 = 10 \\ u_1 + u_6 = 17 \end{cases}$ b) $\begin{cases} u_2 + u_5 - u_3 = 10 \\ u_4 + u_6 = 26 \end{cases}$ c) $\begin{cases} u_3 = -15 \\ u_{14} = 18 \end{cases}$

d) $\begin{cases} u_7 - u_3 = 8 \\ u_2.u_7 = 75 \end{cases}$ e) $\begin{cases} u_7 + u_{15} = 60 \\ u_4^2 + u_{12}^2 = 1170 \end{cases}$ f) $\begin{cases} u_1 + u_3 + u_5 = -12 \\ u_1u_2u_3 = 8 \end{cases}$

Bài 3: a) Giữa các số 7 và 35 hãy đặt thêm 6 số nữa để được một cấp số cộng.

b) Giữa các số 4 và 67 hãy đặt thêm 20 số nữa để được một cấp số cộng.

Bài 4: a) Tìm 3 số hạng liên tiếp của một cấp số cộng, biết tổng của chúng là 27 và tổng các bình phương của chúng là 293.

b) Tìm 4 số hạng liên tiếp của một cấp số cộng, biết tổng của chúng bằng 22 và tổng các bình phương của chúng bằng 66.

Bài 5: a) Ba góc của một tam giác vuông lập thành một cấp số cộng. Tìm số đo các góc đó.

b) Số đo các góc của một đa giác lồi có 9 cạnh lập thành một cấp số cộng có công sai d = 3^0. Tìm số đo của các góc đó.

c) Số đo các góc của một tứ giác lồi lập thành một cấp số cộng và góc lớn nhất gấp 5 lần góc nhỏ nhất. Tìm số đo các góc đó.

Bài 6: Chứng minh rằng nếu 3 số a, b, c lập thành một cấp số cộng thì các số x, y, z cũng lập thành một cấp số cộng, với:

a) $x = b^2 + bc + c^2;\ y = c^2 + ca + a^2;\ z = a^2 + ab + b^2$

b) $x = a^2 - bc;\ y = b^2 - ca;\ z = c^2 - ab$

Bài 7: Tìm x để 3 số a, b, c lập thành một cấp số cộng, với:

a) $a = 10 - 3x;\ b = 2x^2 + 3;\ c = 7 - 4x$ b) $a = x + 1;\ b = 3x - 2;\ c = x^2 - 1$

Bài 8: Tìm các nghiệm số của phương trình: $x^3 - 15x^2 + 71x - 105 = 0$, biết rằng các nghiệm số phân biệt và tạo thành một cấp số cộng.

Bài 9: Người ta trồng 3003 cây theo một hình tam giác như sau: hàng thứ nhất có 1 cây, hàng thứ hai có 2 cây, hàng thứ ba có 3 cây, ... Hỏi có bao nhiêu hàng?

IV. Cấp số nhân

1. Định nghĩa: (u_n) là cấp số nhân $\Leftrightarrow u_{n+1} = u_n.q$ với $n \in N^*$ (q: công bội)

2. Số hạng tổng quát: $u_n = u_1.q^{n-1}$ với $n \ge 2$

3. Tính chất các số hạng: $u_k^2 = u_{k-1}.u_{k+1}$ với $k \ge 2$

4. Tổng *n* số hạng đầu tiên: $\left[\begin{array}{ll} S_n = nu_1 & \text{với } q = 1 \\ S_n = \dfrac{u_1(1-q^n)}{1-q} & \text{với } q \ne 1 \end{array}\right.$

Bài 1: Tìm số hạng đầu và công bội của cấp số nhân, biết:

a) $\begin{cases} u_4 - u_2 = 72 \\ u_5 - u_3 = 144 \end{cases}$ b) $\begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 65 \\ u_1 + u_7 = 325 \end{cases}$ c) $\begin{cases} u_3 + u_5 = 90 \\ u_2 - u_6 = 240 \end{cases}$

d) $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 14 \\ u_1.u_2.u_3 = 64 \end{cases}$ e) $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 21 \\ \dfrac{1}{u_1} + \dfrac{1}{u_2} + \dfrac{1}{u_3} = \dfrac{7}{12} \end{cases}$ f) $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 30 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = 340 \end{cases}$

Bài 2: a) Giữa các số 160 và 5 hãy chèn vào 4 số nữa để tạo thành một cấp số nhân.

b) Giữa các số 243 và 1 hãy đặt thêm 4 số nữa để tạo thành một cấp số nhân.

Bài 3: Tìm 3 số hạng liên tiếp của một cấp số nhân biết tổng của chúng là 19 và tích là 216.

Bài 4: a) Tìm số hạng đầu của một cấp số nhân, biết rằng công bội là 3, tổng số các số hạng là 728 và số hạng cuối là 486.

b) Tìm công bội của một cấp số nhân có số hạng đầu là 7, số hạng cuối là 448 và tổng số các số hạng là 889.

Bài 5: a) Tìm 4 góc của một tứ giác, biết rằng các góc đó lập thành một cấp số nhân và góc cuối gấp 9 lần góc thứ hai.

b) Độ dài các cạnh của ΔABC lập thành một cấp số nhân. Chứng minh rằng ΔABC có hai góc không quá 60^0.

Bài 6: Tìm bốn số hạng liên tiếp của một cấp số nhân, trong đó số hạng thứ hai nhỏ hơn số hạng thứ nhất 35, còn số hạng thứ ba lớn hơn số hạng thứ tư 560.

Bài 7: Số số hạng của một cấp số nhân là một số chẵn. Tổng tất cả các số hạng của nó lớn gấp 3 lần tổng các số hạng có chỉ số lẻ. Xác định công bội của cấp số đó.

Bài 8: Tìm 4 số hạng đầu của một cấp số nhân, biết rằng tổng 3 số hạng đầu là $\dfrac{148}{9}$, đồng thời, theo thứ tự, chúng là số hạng thứ nhất, thứ tư và thứ tám của một cấp số cộng.

Bài 9: Tìm 3 số hạng đầu của một cấp số nhân, biết rằng khi tăng số thứ hai thêm 2 thì các số đó tạo thành một cấp số cộng, còn nếu sau đó tăng số cuối thêm 9 thì chúng lại lập thành một cấp số nhân.

Bài 10: Tìm 4 số trong đó ba số đầu là ba số hạng kế tiếp của một cấp số nhân, còn ba số sau là ba số hạng kế tiếp của một cấp số cộng; tổng hai số đầu và cuối bằng 32, tổng hai số giữa bằng 24.

Bài 11: Tìm các số dương a và b sao cho a, a + 2b, 2a + b lập thành một cấp số cộng và $(b + 1)^2$, ab + 5, $(a + 1)^2$ lập thành một cấp số nhân.

Bài 12: Chứng minh rằng nếu 3 số $\dfrac{2}{y-x}, \dfrac{1}{y}, \dfrac{2}{y-z}$ lập thành một cấp số cộng thì 3 số x, y, z lập thành một cấp số nhân.

CHƯƠNG IV
GIỚI HẠN

I. Giới hạn của dãy số

Giới hạn hữu hạn	Giới hạn vô cực
1. Giới hạn đặc biệt: $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$; $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^k}=0\ (k\in\mathbb{Z}^+)$ $\lim\limits_{n\to+\infty}q^n=0\ (\lvert q\rvert<1)$; $\lim\limits_{n\to+\infty}C=C$ ***2. Định lí :*** *a) Nếu lim $u_n = a$, lim $v_n = b$ thì* • *lim $(u_n + v_n) = a + b$* • *lim $(u_n - v_n) = a - b$* • *lim $(u_n.v_n) = a.b$* • $\lim\frac{u_n}{v_n}=\frac{a}{b}$ *(nếu $b \neq 0$)* *b) Nếu $u_n \geq 0$, $\forall n$ và lim $u_n= a$* *thì $a \geq 0$ và lim $\sqrt{u_n}=\sqrt{a}$* *c) Nếu $\lvert u_n\rvert\le v_n, \forall n$ và lim $v_n = 0$* *thì lim $u_n = 0$* *d) Nếu lim $u_n = a$ thì $\lim\lvert u_n\rvert=\lvert a\rvert$* ***3. Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn*** $S = u_1 + u_1q + u_1q^2 + ... = \frac{u_1}{1-q}\quad(\lvert q\rvert<1)$	***1. Giới hạn đặc biệt:*** $\lim\sqrt{n}=+\infty$ $\lim n^k=+\infty\ (k\in\mathbb{Z}^+)$ $\lim q^n=+\infty\ (q>1)$ ***2. Định lí:*** *a) Nếu* $\lim\lvert u_n\rvert=+\infty$ *thì* $\lim\frac{1}{u_n}=0$ *b) Nếu lim $u_n = a$, lim $v_n = \pm\infty$ thì lim $\frac{u_n}{v_n} = 0$* *c) Nếu lim $u_n = a \neq 0$, lim $v_n = 0$* *thì lim* $\frac{u_n}{v_n}=\begin{cases}+\infty & \text{nếu } a.v_n>0\\ -\infty & \text{nếu } a.v_n<0\end{cases}$ *d) Nếu lim $u_n = +\infty$, lim $v_n = a$* *thì lim$(u_n.v_n)$ =* $\begin{cases}+\infty & \text{nếu } a>0\\ -\infty & \text{nếu } a<0\end{cases}$ ** Khi tính giới hạn có một trong các dạng vô định: $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $0.\infty$ thì phải tìm cách khử dạng vô định.*

Một số phương pháp tìm giới hạn của dãy số:

• **Chia cả tử và mẫu cho luỹ thừa cao nhất của n.**

VD: a) $\lim\frac{n+1}{2n+3}=\lim\frac{1+\frac{1}{n}}{2+\frac{3}{n}}=\frac{1}{2}$ b) $\lim\frac{\sqrt{n^2+n}-3n}{1-2n}=\lim\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}-3}{\frac{1}{n}-2}=1$

c) $\lim(n^2-4n+1)=\lim n^2\left(1-\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}\right)=+\infty$

• ***Nhân lượng liên hợp***: *Dùng các hằng đẳng thức*

$$\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)=a-b;\qquad \left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)=a-b$$

VD: $\lim\left(\sqrt{n^2-3n}-n\right)=\lim\frac{\left(\sqrt{n^2-3n}-n\right)\left(\sqrt{n^2-3n}+n\right)}{\left(\sqrt{n^2-3n}+n\right)}=\lim\frac{-3n}{\sqrt{n^2-3n}+n}=-\frac{3}{2}$

Khi tính các giới hạn dạng phân thức, ta chú ý một số trường hợp sau đây:

• *Nếu bậc của tử nhỏ hơn bậc của mẫu thì kết quả của giới hạn đó bằng 0.*

• Nếu bậc của từ bằng bậc của mẫu thì kết quả của giới hạn đó bằng tỉ số các hệ số của luỹ thừa cao nhất của tử và của mẫu.

• Nếu bậc của tử lớn hơn bậc của mẫu thì kết quả của giới hạn đó là $+\infty$ nếu hệ số cao nhất của tử và mẫu cùng dấu và kết quả là $-\infty$ nếu hệ số cao nhất của tử và mẫu trái dấu.

Bài 6: Tính các giới hạn sau:

a) $\lim \dfrac{2n^2-n+3}{3n^2+2n+1}$ b) $\lim \dfrac{2n+1}{n^3+4n^2+3}$ c) $\lim \dfrac{3n^3+2n^2+n}{n^3+4}$

d) $\lim \dfrac{n^4}{(n+1)(2+n)(n^2+1)}$ e) $\lim \dfrac{n^2+1}{2n^4+n+1}$ f) $\lim \dfrac{2n^4+n^2-3}{3n^3-2n^2+1}$

Bài 7: Tính các giới hạn sau:

a) $\lim \dfrac{1+3^n}{4+3^n}$ b) $\lim \dfrac{4.3^n+7^{n+1}}{2.5^n+7^n}$ c) $\lim \dfrac{4^{n+1}+6^{n+2}}{5^n+8^n}$

d) $\lim \dfrac{2^n+5^{n+1}}{1+5^n}$ e) $\lim \dfrac{1+2.3^n-7^n}{5^n+2.7^n}$ f) $\lim \dfrac{1-2.3^n+6^n}{2^n(3^{n+1}-5)}$

Bài 8: Tính các giới hạn sau:

a) $\lim \dfrac{\sqrt{4n^2+1}+2n-1}{\sqrt{n^2+4n+1}+n}$ b) $\lim \dfrac{\sqrt{n^2+3}-n-4}{\sqrt{n^2+2}+n}$ c) $\lim \dfrac{n^2+\sqrt[3]{1-n^6}}{\sqrt{n^4+1}+n^2}$

d) $\lim \dfrac{\sqrt{4n^2+1}+2n}{\sqrt{n^2+4n+1}+n}$ e) $\lim \dfrac{(2n\sqrt{n}+1)(\sqrt{n}+3)}{(n+1)(n+2)}$ f) $\lim \dfrac{\sqrt{n^2-4n}-\sqrt{4n^2+1}}{\sqrt{3n^2+1}+n}$

Bài 9: Tính các giới hạn sau:

a) $\lim \left(\dfrac{1}{1.3}+\dfrac{1}{3.5}+\ ...\ +\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right)$ b) $\lim \left(\dfrac{1}{1.3}+\dfrac{1}{2.4}+\ ...\ +\dfrac{1}{n(n+2)}\right)$

c) $\lim \left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)\ ...\ \left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$ d) $\lim \left(\dfrac{1}{1.2}+\dfrac{1}{2.3}+\ ...\ +\dfrac{1}{n(n+1)}\right)$

e) $\lim \dfrac{1+2+...+n}{n^2+3n}$ f) $\lim \dfrac{1+2+2^2+...+2^n}{1+3+3^2+...+3^n}$

Bài 10: Tính các giới hạn sau:

a) $\lim \left(\sqrt{n^2+2n}-n-1\right)$ b) $\lim \left(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+2}\right)$ c) $\lim \left(\sqrt[3]{2n-n^3}+n-1\right)$

d) $\lim \left(1+n^2-\sqrt{n^4+3n+1}\right)$ e) $\lim \left(\sqrt{n^2-n}-n\right)$ f) $\lim \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2+4}}$

g) $\lim \dfrac{\sqrt{4n^2+1}-2n-1}{\sqrt{n^2+4n+1}-n}$ h) $\lim \dfrac{n^2+\sqrt[3]{1-n^6}}{\sqrt{n^4+1}-n^2}$ i) $\lim \dfrac{\sqrt{n^2-4n}-\sqrt{4n^2+1}}{\sqrt{3n^2+1}-n}$

II. Giới hạn của hàm số

Giới hạn hữu hạn	Giới hạn vô cực, giới hạn ở vô cực

1. Giới hạn đặc biệt: $\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$; $\lim\limits_{x\to x_0} c = c$ *(c: hằng số)* **2. Định lí:** *a) Nếu* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ *và* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = M$ *thì:* $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)+g(x)\right] = L+M$ $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)-g(x)\right] = L-M$ $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x).g(x)\right] = L.M$ $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}$ *(nếu $M \neq 0$)* *b) Nếu $f(x) \geq 0$ và* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ *thì $L \geq 0$ và* $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$ *c) Nếu* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ *thì* $\lim\limits_{x\to x_0}\lvert f(x)\rvert = \lvert L\rvert$ **3. Giới hạn một bên:** $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = L$	**1. Giới hạn đặc biệt:** $\lim\limits_{x\to+\infty} x^k = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} x^k = \begin{cases} +\infty & \text{nếu } k \text{ chẵn} \\ -\infty & \text{nếu } k \text{ lẻ} \end{cases}$ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} c = c$; $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{c}{x^k} = 0$ $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x} = -\infty$; $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x} = +\infty$ $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{\lvert x\rvert} = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{\lvert x\rvert} = +\infty$ **2. Định lí:** *Nếu* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L \neq 0$ *và* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$ *thì:* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x) = \begin{cases} +\infty & \text{nếu } L \text{ và } \lim\limits_{x\to x_0} g(x) \text{ cùng dấu} \\ -\infty & \text{nếu } L \text{ và } \lim\limits_{x\to x_0} g(x) \text{ trái dấu} \end{cases}$ $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} 0 & \text{nếu } \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty \\ +\infty & \text{nếu } \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0 \text{ và } L.g(x) > 0 \\ -\infty & \text{nếu } \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0 \text{ và } L.g(x) < 0 \end{cases}$ ** Khi tính giới hạn có một trong các dạng vô định: $\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $0.\infty$ thì phải tìm cách khử dạng vô định.*

Một số phương pháp khử dạng vô định:

1. Dạng $\dfrac{0}{0}$

a) $L = \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ ***với P(x), Q(x) là các đa thức và*** $P(x_0) = Q(x_0) = 0$

Phân tích cả tử và mẫu thành nhân tử và rút gọn.

VD: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x^2-4} = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x+2)} = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+2x+4}{x+2} = \dfrac{12}{4} = 3$

b) $L = \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ ***với*** $P(x_0) = Q(x_0) = 0$ ***và P(x), Q(x) là các biểu thức chứa căn cùng bậc***

Sử dụng các hằng đẳng thức để nhân lượng liên hợp ở tử và mẫu.

VD: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2-\sqrt{4-x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(2-\sqrt{4-x}\right)\left(2+\sqrt{4-x}\right)}{x\left(2+\sqrt{4-x}\right)} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{2+\sqrt{4-x}} = \dfrac{1}{4}$

c) $L = \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ ***với*** $P(x_0) = Q(x_0) = 0$ ***và P(x) là biểu thức chứa căn không đồng bậc***

Giả sử: $P(x) = \sqrt[m]{u(x)} - \sqrt[n]{v(x)}$ *với* $\sqrt[m]{u(x_0)} = \sqrt[n]{v(x_0)} = a$.

Ta phân tích $P(x) = \left(\sqrt[m]{u(x)} - a\right) + \left(a - \sqrt[n]{v(x)}\right)$.

VD: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt{1-x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x} + \dfrac{1-\sqrt{1-x}}{x}\right)$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1}+\frac{1}{1+\sqrt{1-x}}\right)=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{5}{6}$$

2. Dạng $\frac{\infty}{\infty}$: $L = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}$ với P(x), Q(x) là các đa thức hoặc các biểu thức chứa căn.

– Nếu P(x), Q(x) là các đa thức thì chia cả tử và mẫu cho luỹ thừa cao nhất của x.

– Nếu P(x), Q(x) có chứa căn thì có thể chia cả tử và mẫu cho luỹ thừa cao nhất của x hoặc nhân lượng liên hợp.

VD: a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^2+5x-3}{x^2+6x+3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2+\frac{5}{x}-\frac{3}{x^2}}{1+\frac{6}{x}+\frac{3}{x^2}}=2$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x-3}{\sqrt{x^2+1}-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2-\frac{3}{x}}{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-1}=-1$

3. Dạng $\infty - \infty$: Giới hạn này thường có chứa căn

Ta thường sử dụng phương pháp nhân lượng liên hợp của tử và mẫu.

VD: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}=0$

4. Dạng $0.\infty$:

Ta cũng thường sử dụng các phương pháp như các dạng ở trên.

VD: $\lim\limits_{x\to 2^+}(x-2)\sqrt{\frac{x}{x^2-4}}=\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{\sqrt{x-2}.\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}}=\frac{0.\sqrt{2}}{2}=0$

Bài 6: Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+x+x^2+x^3}{1+x}$ b) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{\sqrt{3x^2+1}-x}{x-1}$ c) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{x}$

d) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{|x-1|}{x^4+x-3}$ e) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2-x+1}}{x-1}$ f) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2-2x+3}}{x+1}$

g) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+8}-3}{x-2}$ h) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{3x^2-4}-\sqrt{3x-2}}{x+1}$ i) $\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\frac{1}{2}$

Bài 7: Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-x^2-x+1}{x^2-3x+2}$ b) $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x^4-1}{x^3-2x^2+x}$ c) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^5+1}{x^3+1}$

d) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^3-5x^2+3x+9}{x^4-8x^2-9}$ e) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-5x^5+4x^6}{(1-x)^2}$ f) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^m-1}{x^n-1}$

g) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}$ h) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x+x^2+...+x^n-n}{x-1}$ i) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^4-16}{x^3+2x^2}$

Bài 8: Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{4x+1}-3}{x^2-4}$ b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{4x+4}-2}$. c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$

d) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+7}-3}$ e) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2x+2}-\sqrt{3x+1}}{x-1}$ f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$

g) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$ h) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x+\sqrt{3-2x}}{x^2+3x}$ i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+9}+\sqrt{x+16}-7}{x}$

Bài 9: Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{1+x}}{x}$ b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{8x+11}-\sqrt{x+7}}{x^2-3x+2}$ c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{8-x}}{x}$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+4x}-\sqrt[3]{1+6x}}{x^2}$ e) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{8x+11}-\sqrt{x+7}}{2x^2-5x+2}$ f) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5-x^3}-\sqrt[3]{x^2+7}}{x^2-1}$

g) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+4x}.\sqrt{1+6x}-1}{x}$ h) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x}.\sqrt[3]{1+4x}-1}{x}$ i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt{1-x}}{x}$

Bài 10: Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2+1}{2x^2-x+1}$ b) $\lim\limits_{x\to \pm\infty}\dfrac{2x^2-x+1}{x-2}$ c) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x^2+1}{x^3-3x^2+2}$

d) $\lim\limits_{x\to \pm\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+2x+3}+4x+1}{\sqrt{4x^2+1}+2-x}$ e) $\lim\limits_{x\to \pm\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2-2x+1}+2-x}{\sqrt{9x^2-3x}+2x}$ f) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x\sqrt{x}+1}{x^2+x+1}$

g) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{(2x-1)\sqrt{x^2-3}}{x-5x^2}$ h) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+2x}+3x}{\sqrt{4x^2+1}-x+2}$ i) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^2-5x+2}{2|x|+1}$

Bài 11: Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$ b) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(2x-1-\sqrt{4x^2-4x-3}\right)$

c) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt[3]{x^3-1}\right)$ d) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)$

e) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt[3]{2x-1}-\sqrt[3]{2x+1}\right)$ f) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt[3]{3x^3-1}+\sqrt{x^2+2}\right)$

g) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$ h) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x^2-3x+2}+\dfrac{1}{x^2-5x+6}\right)$

Bài 12: Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x-15}{x-2}$ b) $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x-15}{x-2}$ c) $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{1+3x-2x^2}{x-3}$

d) $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{x-2}$ e) $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{|2-x|}{2x^2-5x+2}$ f) $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{|2-x|}{2x^2-5x+2}$

Chương III: QUAN HỆ VUÔNG GÓC

VẤN ĐỀ 1: Chứng minh một đẳng thức vectơ.

• ***Dựa vào qui tắc các phép toán về vectơ và các hệ thức vectơ.***

+ Quy tắc 3 điểm: A, B, C tùy ý. Ta có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$

+ Quy tắc trừ: O, A, B tùy ý. Ta có: $\overrightarrow{0B}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$

+ Qui tắc hình bình hành: ABCD là hình bình hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$

+ Qui tắc hình hộp: ABCD.A'B'C'D' ì hình hộp $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}$

+ Nếu I là trung điểm AB, M tùy ý. Ta có:

$\overrightarrow{IA}=-\overrightarrow{IB}\Leftrightarrow \overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$ hay $\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{BI}=\vec{0}$ và $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$

+ Nếu G là trọng tâm tam giác ABC, M tùy ý. Ta có:

$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ hay $\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}=\vec{0}$ và $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$

+ $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$

1. Cho tứ diện ABCD. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB và CD, I là trung điểm của EF. CM

a) $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=\vec{0}$. b) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MI}$, với M tuỳ ý.

2. Cho tứ diện ABCD. Gọi G là trọng tâm ΔBCD, O là trung điểm đoạn AG. CMR:

a) $3\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$ b) $3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=6\overrightarrow{MO}$

3. Cho tứ diện ABCD .Gọi M,N lần lượt là trung điểm của các cạnh AD và BC .G là trọng tâm của tam giác BCD. Chứng minh rằng :

$a)\ \overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}\right)$ $b)\ \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AG}$

VẤN ĐỀ 2: Tích vô hướng và ứng dụng.

• ***Góc giữa hai vectơ trong không gian:***

$\overrightarrow{AB}=\vec{u},\overrightarrow{AC}=\vec{v}\Rightarrow(\vec{u},\vec{v})=BAC\ (0^0\le BAC\le 180^0)$

• ***Tích vô hướng của hai vectơ trong không gian:***

+ Cho $\vec{u},\vec{v}\neq\vec{0}$. Tích vơ hướng của 2 vectơ $\vec{u},\vec{v}\neq\vec{0}$ì: $\vec{u}.\vec{v}=|\vec{u}|.|\vec{v}|.\cos(\vec{u},\vec{v})$

+ Với $\vec{u}=\vec{0}$ *hoặc* $\vec{v}=\vec{0}$. Qui ước: $\vec{u}.\vec{v}=0$

+ $\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow\vec{u}.\vec{v}=0$

• ***Tính độ đi 1 đoạn thẳng:*** $AB=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{\overrightarrow{AB}^2}$

1. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông. Tất cả các cạnh bên và cạnh đáy của hình chóp = a. Tính các tích vô hướng:

a) $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SB}$ b) $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SC}$ c) $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{BA}$

2. Cho tứ diện ABCD có hai mặt ABC và ABD là hai tam giác đều cạnh a. Chứng minh rằng AB và CD vuông góc với nhau.