CHƯƠNG III: NGUYÊN HÀM

Bảng nguyên hàm các hàm số đơn giản

	u là hàm số theo biến x, tức là $u=u(x)$	***Trường hợp đặc biệt** $u=ax+b, a\neq 0$
***Nguyên hàm của các hàm số đơn giản**		
$\int dx = x + C$	$\int du = u + C$	
$\int k.dx = k.x + C$, k là hằng số	$\int k.du = k.u + C$	
$\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$	$\int u^{\alpha}du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$	$\int (ax+b)^{\alpha}.dx = \frac{1}{a}.\frac{(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
$\int \frac{1}{x}dx = \ln\|x\| + C$	$\int \frac{1}{u}du = \ln\|u\| + C$	$\int \frac{1}{(ax+b)}dx = \frac{1}{a}\ln\|ax+b\| + C$
$\int \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x} + C$	$\int \frac{1}{u^2}dx = -\frac{1}{u} + C$	
$\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x} + C$	$\int \frac{1}{\sqrt{u}}du = 2\sqrt{u} + C$	$\int \frac{1}{\sqrt{ax+b}}du = \frac{1}{a}.2\sqrt{ax+b} + C$
***Nguyên hàm của hàm số mũ**		
$\int e^{x}dx = e^{x} + C$	$\int e^{u}du = e^{u} + C$	$\int e^{ax+b}dx = \frac{1}{a}e^{ax+b} + C$
$\int e^{-x}dx = -e^{-x} + C$	$\int e^{-u}du = -e^{-u} + C$	
$\int a^{x}dx = \frac{a^{x}}{\ln a} + C, 0 < a \neq 1$	$\int a^{u}du = \frac{a^{u}}{\ln a} + C$	$\int a^{mx+n}dx = \frac{1}{m}.\frac{a^{mx+n}}{\ln a} + C, m \neq 0$
***Nguyên hàm của hàm số lượng giác**		
$\int \cos x.dx = \sin x + C$	$\int \cos u.du = \sin u + C$	$\int \cos(ax+b)dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + C$
$\int \sin x.dx = -\cos x + C$	$\int \sin u.du = -\cos u + C$	$\int \sin(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C$
$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + C$	$\int \frac{1}{\cos^2 u}du = \tan u + C$	$\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)}dx = \frac{1}{a}\tan(ax+b) + C$
$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\cot x + C$	$\int \frac{1}{\sin^2 u}du = -\cot u + C$	$\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)}dx = -\frac{1}{a}\cot g(ax+b) + C$

Một số ví dụ trong trường hợp đặc biệt

***Trường hợp đặc biệt** $u = ax+b$	**Ví dụ**
$\int \cos kx.dx = \frac{1}{k}\sin kx + C$	$\int \cos 2x.dx = \frac{1}{2}\sin 2x + C, (k=2)$
$\int \sin kx.dx = -\frac{1}{k}\cos kx + C$	$\int \sin 2x.dx = -\frac{1}{2}\cos 2x + C$
$\int e^{kx}dx = \frac{1}{k}e^{kx} + C$	$\int e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x} + C$
$\int (ax+b)^{\alpha}.dx = \frac{1}{a}.\frac{(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$	$\int (2x+1)^{2}.dx = \frac{1}{2}.\frac{(2x+1)^{2+1}}{2+1} + C = \frac{1}{6}.(2x+1)^{3} + C$

$\int \frac{1}{(ax+b)}dx = \frac{1}{a}\ln\lvert ax+b\rvert + C$	$\int \frac{1}{3x-1}dx = \frac{1}{3}\ln\lvert 3x-1\rvert + C$
$\int \frac{1}{\sqrt{ax+b}}du = \frac{1}{a}.2\sqrt{ax+b} + C$	$\int \frac{1}{\sqrt{3x+5}}du = \frac{1}{3}.2\sqrt{3x+5} + C = \frac{2}{3}\sqrt{3x+5} + C$
$\int e^{ax+b}dx = \frac{1}{a}e^{ax+b} + C$	$\int e^{2x+1}dx = \frac{1}{2}e^{2x+1} + C$
$\int a^{mx+n}du = \frac{1}{m}.\frac{a^{mx+n}}{\ln a} + C, m \neq 0$	$\int 5^{2x+1}dx = \frac{1}{2}.\frac{5^{2x+1}}{\ln 5} + C$
$\int \cos(ax+b)dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + C$	$\int \cos(2x+1)dx = \frac{1}{2}\sin(2x+1) + C$
$\int \sin(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C$	$\int \sin(3x-1)dx = -\frac{1}{3}\cos(3x-1) + C$
$\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)}dx = \frac{1}{a}\tan(ax+b) + C$	$\int \frac{1}{\cos^2(2x+1)}dx = \frac{1}{2}\tan(2x+1) + C$
$\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)}dx = -\frac{1}{a}\cot(ax+b) + C$	$\int \frac{1}{\sin^2(3x+1)}dx = -\frac{1}{3}\cot(3x+1) + C$

*Chú ý: Những công thức trên có thể chứng minh bằng cách lấy đạo hàm vế trái hoặc tính bằng phương pháp đổi biến số đặt $u = ax+b \Rightarrow du = .?.dx \Rightarrow dx = .?.du$

<u>Ví dụ:</u> Chứng minh $\int \cos(ax+b)dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + C, a \neq 0$

<u>Giải:</u> Đặt $u = ax+b \Rightarrow du = (ax+b)'dx = a.dx \Rightarrow dx = \frac{1}{a}.du$

Suy ra $\int \cos(ax+b)dx = \int \cos u.\frac{1}{a}.du = \frac{1}{a}\int \cos u.du = \frac{1}{a}.\sin u + C = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + C$

I. Tìm nguyên hàm bằng định nghĩa và các tính chất

A/ Tìm nguyên hàm của các hàm số.

<u>Bài 1:</u> Sử dụng bảng nguyên hàm và tính chất

$a) f(x) = 2x^9 - \frac{1}{2}$ kq: $F(x) = \frac{x^{10}}{5} - \frac{1}{2}x + C$

$b) f(x) = 3^x + x + 1$ kq: $F(x) = \frac{3^x}{\ln 3} + \frac{x^2}{2} + x + C$

$c) f(x) = \frac{2}{x} + 3$ kq: $F(x) = 2\ln\lvert x\rvert + 3x + C$

$d) f(x) = 2\sin x$ kq: $F(x) = -2\cos x + C$

$e) f(x) = \frac{\cos x}{3}$ kq: $F(x) = \frac{1}{3}\sin x + C$

<u>Bài 2</u>: Tìm nguyên hàm của các hàm số

a. $f(x) = x^2 - 3x + \frac{1}{x}$ ĐS. $F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + \ln\lvert x\rvert + C$

b f(x) = $\dfrac{2x^4+3}{x^2}$ ĐS. F(x) = $\dfrac{2x^3}{3}-\dfrac{3}{x}+C$

c. f(x) = $\dfrac{x-1}{x^2}$ ĐS. F(x) = $\ln|x|+\dfrac{1}{x}+C$

d. f(x) = $\dfrac{(x^2-1)^2}{x^2}$ ĐS. F(x) = $\dfrac{x^3}{3}-2x+\dfrac{1}{x}+C$

e. f(x) = $\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}$ ĐS. F(x) = $\dfrac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}+\dfrac{3x^{\frac{4}{3}}}{4}+\dfrac{4x^{\frac{5}{4}}}{5}+C$

f. f(x) = $\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\dfrac{2}{\sqrt[3]{x}}$ ĐS. F(x) = $2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x^2}+C$

g. f(x) = $\dfrac{(\sqrt{x}-1)^2}{x}$ ĐS. F(x) = $x-4\sqrt{x}+\ln|x|+C$

h. f(x) = $\dfrac{x-1}{\sqrt[3]{x}}$ ĐS. F(x) = $x^{\frac{5}{3}}-x^{\frac{2}{3}}+C$

$i)\ f(x)=x^5+3x^2-4$ $kq:\ F(x)=\dfrac{x^6}{6}+x^3-4x+C$

$j)\ f(x)=\dfrac{x^3}{2}+5x^2+2x+1$ $kq:\ F(x)=\dfrac{1}{8}x^4+\dfrac{5}{3}x^3+x^2+x+C$

$k)\ f(x)=-\dfrac{2}{3}x^6+3x^5+3x^2-2$ $kq:\ F(x)=-\dfrac{2}{21}x^7+\dfrac{1}{2}x^6+x^3-2x+C$

$l)\ f(x)=(2x+3x^{-2})(x^2-\dfrac{1}{x})+3x^{-3}$ $kq:\ F(x)=\dfrac{1}{2}x^4+x+C$

* HD: nếu gặp hằng đẳng thức thì khai triễn hằng đẳng thức, ví dụ: $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

Bài 3 : Tìm

$a)\int(x-2)(x+4)dx$ kq: $F(x)=\dfrac{1}{3}x^3+x^2-8x+C$

$b)\int(x^2-3)(x+1)dx$ kq: $F(x)=\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{3}{2}x^2-3x+C$

$c)\int 3(x-3)^2dx$ kq: $F(x)=x^3-9x^2+27x+C$

$g)\int\dfrac{x^2-5x}{x}dx$ kq: $F(x)=\dfrac{1}{2}x^2-5x+C$

$h)\int\dfrac{2x^3-5x^2-1}{x}dx$ kq: $F(x)=\dfrac{2}{3}x^3-\dfrac{5}{2}x^2-\ln|x|+C$

$g)\int\dfrac{2x^3-5x^2-1}{x^2}dx$ kq: $F(x)=x^2-5x+\dfrac{1}{x}+C$

$h)\int\dfrac{(x+2)^2}{x}dx$ kq: $F(x)=\dfrac{1}{2}x^2+4x+4\ln|x|+C$

$i)\int\dfrac{(x+4)^2}{x^2}dx$ kq: $F(x)=x+8\ln|x|-\dfrac{16}{x}+C$

Bài 4 Tìm

$a)\int (x^{\frac{3}{4}} + x^{-\frac{1}{2}} - 5)dx$ kq: $F(x) = \frac{4}{7}x^{\frac{7}{4}} + 2x^{\frac{1}{2}} - 5x + C$

$b)\int (x^{-3} - 2x^{-2} + 4x + 1)dx$ kq: $F(x) = -\frac{1}{2x^2} + \frac{2}{x} + 2x^2 + x + C$

$c)\int \sqrt{x}(\sqrt{x} - 2x)(x+1)dx$ kq: $F(x) = \frac{x^3}{3} + 2x - \frac{1}{x} + C$

$d)\int (2x+1)(1 - \frac{1}{x})dx$ kq: $F(x) = x^2 - \ln|x| - x + C$

Bài 5: Tìm

$a)\int (2.3^x + 4^x)dx$ kq: $F(x) = \frac{2.3^x}{\ln 3} + \frac{4^x}{\ln 4} + C$

$b)\int (2.a^x + 5^x)dx$ kq: $F(x) = \frac{2.a^x}{\ln a} + \frac{5^x}{\ln 5} + C$

$c)\int (3e^x + 5\sin x - \frac{1}{x})dx$ kq: $F(x) = 3e^x - 5\cos x - \ln|x| + C$

$d)\int e^x(2 + \frac{e^{-x}}{\cos^2 x})dx$ kq: $F(x) = 2.e^x + \tan x + C$

$e)\int 2^x.3^x dx$ kq: $F(x) = \frac{6^x}{\ln 3} + C$

$f)\int 2^x.3^{2x}.5^x dx$ kq: $F(x) = \frac{90^x}{\ln 90} + C$

$g)\int e^x(2 - e^{-x})$ kq: $2e^x - x + C$

$h)\int \frac{e^x}{2^x}dx$ kq: $\frac{e^x}{(1 - \ln 2)2^x} + C$

Bài 7: Tìm hàm số f(x) biết rằng

$a)\ f'(x) = 2x + 1;\ f(1) = 5$ kq: $\mathrm{f}(x) = x^2 + x + 3$

$b)\ f'(x) = 2 - x^2;\ f(2) = \frac{7}{3}$ kq: $\mathrm{f}(x) = 2x - \frac{x^3}{3} + 1$

$c)\ f'(x) = x - \frac{1}{x^2} + 2;\ f(1) = 2$ kq: $\mathrm{f}(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{x} + 2x - \frac{3}{2}$

$d)\ f'(x) = 4\sqrt{x} - x;\ f(4) = 0$ kq: $\mathrm{f}(x) = \frac{8x\sqrt{x}}{3} - \frac{x^2}{2} - \frac{40}{3}$

$e)\ f'(x) = 4x^3 - 3x^2 + 2;\ f(-1) = 3$ kq: $\mathrm{f}(x) = x^4 - x^3 + 2x + 3$

$f)\ f'(x) = \sqrt[3]{x} + x^3 + 1;\ f(1) = 2$ kq: $\mathrm{f}(x) = \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + \frac{x^4}{4} + x$

$g)\ f'(x) = (x+1)(x-1) + 1;\ f(0) = 1$ kq: $\mathrm{f}(x) = \frac{x^3}{3} + 1$

$h)\ f'(x) = 3(x+2)^2;\ f(0) = 8$ kq: $\mathrm{f}(x) = (x+2)^3$

Bài 8: **Tìm hàm số f(x) biết rằng**

$a)\ f'(x)=ax+\frac{b}{x^2};\ f(-1)=2,\ f(1)=4$ kq: $f(x)=\frac{x^2}{2}+\frac{1}{x}+\frac{5}{2}$

$b)\ f'(x)=\frac{15\sqrt{x}}{14};\ f(1)=4,\ f(4)=9$ kq: $f(x)=\frac{5\sqrt{x^3}}{7}+\frac{23}{7}$

II. MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP TÌM NGUYÊN HÀM

1.Phương pháp đổi biến số.

Tính I = $\int f[u(x)].u'(x)dx$ bằng cách đặt t = u(x)

- Đặt t = u(x) $\Rightarrow dt=u'(x)dx$
- I = $\int f[u(x)].u'(x)dx=\int f(t)dt$

Tìm nguyên hàm của các hàm số sau:

1. $\int (5x-1)dx$ 2. $\int \frac{dx}{(3-2x)^5}$ 3. $\int \sqrt{5-2x}dx$ 4. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1}}$

5. $\int (2x^2+1)^7xdx$ 6. $\int (x^3+5)^4x^2dx$ 7. $\int \sqrt{x^2+1}.xdx$ 8. $\int \frac{x}{x^2+5}dx$

9. $\int \frac{3x^2}{\sqrt{5+2x^3}}dx$ 10. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}$ 11. $\int \frac{\ln^3 x}{x}dx$ 12. $\int x.e^{x^2+1}dx$

13. $\int \sin^4 x\cos xdx$ 14. $\int \frac{\sin x}{\cos^5 x}dx$ 15. $\int \cot gxdx$ 16. $\int \frac{tgxdx}{\cos^2 x}$

2. Phương pháp lấy nguyên hàm từng phần.

Nếu u(x) , v(x) là hai hàm số có đạo hàm liên tục trên I

$$\int u(x).v'(x)dx=u(x).v(x)-\int v(x).u'(x)dx$$

Hay

$\int udv=uv-\int vdu$ (với du = u’(x)dx, dv = v’(x)dx)

Tìm nguyên hàm của các hàm số sau:

1. $\int x.\sin xdx$ 2. $\int x\cos xdx$ 3. $\int (x^2+5)\sin xdx$ 4 $\int (x^2+2x+3)\cos xdx$

5. $\int x\sin 2xdx$ 6. $\int x\cos 2xdx$ 7. $\int x.e^xdx$ 8. $\int \ln xdx$

9. $\int x\ln xdx$ 10. $\int \ln^2 xdx$ 11. $\int \frac{\ln xdx}{\sqrt{x}}$ 12. $\int e^{\sqrt{x}}dx$

13. $\int \frac{x}{\cos^2 x}dx$ 14. $\int xtg^2xdx$ 15. $\int \sin\sqrt{x}\ dx$ 16. $\int \ln(x^2+1)dx$

17. $\int e^x.\cos xdx$ 18. $\int x^3e^{x^2}dx$ 19. $\int x\ln(1+x^2)dx$ 20. $\int 2^xxdx$

21. $\int x\lg xdx$ 22. $\int 2x\ln(1+x)dx$ 23. $\int \frac{\ln(1+x)}{x^2}dx$ 24. $\int x^2\cos 2xdx$

CHƯƠNG III
PHƯƠNG PHÁP TOẠ ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

I. VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

1. Định nghĩa và các phép toán

• Định nghĩa, tính chất, các phép toán về vectơ trong không gian được xây dựng hoàn toàn tương tự như trong mặt phẳng.

• Lưu ý:

+ **Qui tắc ba điểm:** Cho ba điểm A, B, C bất kỳ, ta có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$

+ **Qui tắc hình bình hành:** Cho hình bình hành ABCD, ta có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$

+ **Qui tắc hình hộp:** Cho hình hộp ABCD.A′B′C′D′, ta có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}$

+ **Hệ thức trung điểm đoạn thẳng:** Cho I là trung điểm của đoạn thẳng AB, O tuỳ ý.

Ta có: $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$; $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OI}$

+ **Hệ thức trọng tâm tam giác:** Cho G là trọng tâm của tam giác ABC, O tuỳ ý.

Ta có: $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$; $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OG}$

+ **Hệ thức trọng tâm tứ diện:** Cho G là trọng tâm của tứ diện ABCD, O tuỳ ý.

Ta có: $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$; $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=4\overrightarrow{OG}$

+ **Điều kiện hai vectơ cùng phương:** $\vec{a}$ *vaø* $\vec{b}$ *cuøng phöông* $(\vec{a}\neq\vec{0}) \Leftrightarrow \exists! k\in R: \vec{b}=k\vec{a}$

+ **Điểm M chia đoạn thẳng AB theo tỉ số k** ($k \neq 1$), O tuỳ ý.

Ta có: $\overrightarrow{MA}=k\overrightarrow{MB}$; $\overrightarrow{OM}=\dfrac{\overrightarrow{OA}-k\overrightarrow{OB}}{1-k}$

2. Sự đồng phẳng của ba vectơ

• Ba vectơ được gọi là đồng phẳng nếu các giá của chúng cùng song song với một mặt phẳng.

• **Điều kiện để ba vectơ đồng phẳng:** Cho ba vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, trong đó $\vec{a}$ *vaø* $\vec{b}$ không cùng phương. Khi đó: $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow \exists!$ m, n $\in$ R: $\vec{c}=m\vec{a}+n\vec{b}$

• Cho ba vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ không đồng phẳng, $\vec{x}$ tuỳ ý.

Khi đó: $\exists!$ m, n, p $\in$ R: $\vec{x}=m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}$

3. Tích vô hướng của hai vectơ

• **Góc giữa hai vectơ trong không gian:**

$$\overrightarrow{AB}=\vec{u},\ \overrightarrow{AC}=\vec{v} \Rightarrow (\vec{u},\vec{v})=BAC\ (0^0\leq BAC\leq 180^0)$$

• **Tích vô hướng của hai vectơ trong không gian:**

+ Cho $\vec{u},\vec{v}\neq\vec{0}$. Khi đó: $\vec{u}.\vec{v}=|\vec{u}|.|\vec{v}|.\cos(\vec{u},\vec{v})$

+ Với $\vec{u}=\vec{0}$ *hoaëc* $\vec{v}=\vec{0}$. Qui ước: $\vec{u}.\vec{v}=0$

+ $\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v}=0$

+ $|\vec{u}|=\sqrt{\vec{u}^2}$

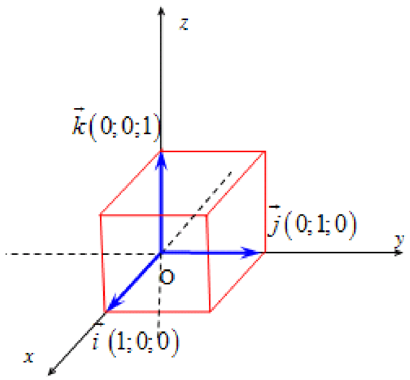
II. HỆ TOẠ ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

1. Hệ tọa độ Đêcac vuông góc trong không gian:

Cho ba trục Ox, Oy, Oz vuông góc với nhau từng đôi một và chung một điểm gốc O. Gọi $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ là các vectơ đơn vị, tương ứng trên các trục Ox, Oy, Oz. Hệ ba trục như vậy gọi là hệ tọa độ Đêcac vuông góc Oxyz hoặc đơn giản là hệ tọa độ Oxyz.

Chú ý: $\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1$ và $\vec{i}.\vec{j} = \vec{i}.\vec{k} = \vec{k}.\vec{j} = 0$.

2. Tọa độ của vectơ:



a) Định nghĩa: $\vec{u} = (x;\ y;\ z) \Leftrightarrow \vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

b) Tính chất: Cho $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3),\ \vec{b} = (b_1; b_2; b_3),\ k \in R$

- $\vec{a} \pm \vec{b} = (a_1 \pm b_1;\ a_2 \pm b_2;\ a_3 \pm b_3)$
- $k\vec{a} = (ka_1;\ ka_2;\ ka_3)$
- $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3 \end{cases}$
- $\vec{0} = (0;0;0),\ \vec{i} = (1;0;0),\ \vec{j} = (0;1;0),\ \vec{k} = (0;0;1)$
- $\vec{a}$ cùng phương $\vec{b}(\vec{b} \neq \vec{0}) \Leftrightarrow \vec{a} = k\vec{b}\ (k \in R)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = kb_1 \\ a_2 = kb_2 \\ a_3 = kb_3 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3},\quad (b_1, b_2, b_3 \neq 0)$$

- $\vec{a}.\vec{b} = a_1.b_1 + a_2.b_2 + a_3.b_3$
- $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$
- $\vec{a}^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$
- $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_2^2}$
- $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|} = \dfrac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$ (với $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$)

3. Tọa độ của điểm:

a) Định nghĩa: $M(x;\ y;\ z) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = (x; y; z)$ (x : hoành độ, y : tung độ, z : cao độ)

Chú ý:
- M ∈ (Oxy) ⇔ z = 0; M ∈ (Oyz) ⇔ x = 0; M ∈ (Oxz) ⇔ y = 0
- M ∈ Ox ⇔ y = z = 0; M ∈ Oy ⇔ x = z = 0; M ∈ Oz ⇔ x = y = 0

b) Tính chất: Cho $A(x_A;\ y_A;\ z_A),\ B(x_B;\ y_B;\ z_B)$

- $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$
- $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$
- Toạ độ điểm M chia đoạn AB theo tỉ số k (k≠1): $M\left(\dfrac{x_A - kx_B}{1-k}; \dfrac{y_A - ky_B}{1-k}; \dfrac{z_A - kz_B}{1-k}\right)$
- Toạ độ trung điểm M của đoạn thẳng AB: $M\left(\dfrac{x_A + x_B}{2}; \dfrac{y_A + y_B}{2}; \dfrac{z_A + z_B}{2}\right)$
- Toạ độ trọng tâm G của tam giác ABC:

$$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; \frac{z_A + z_B + z_C}{3}\right)$$

- Toạ độ trọng tâm G của tứ diện ABCD:

$$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C + x_D}{4}; \frac{y_A + y_B + y_C + y_D}{4}; \frac{z_A + z_B + z_C + z_C}{4}\right)$$

4. Tích có hướng của hai vectơ: (Chương trình nâng cao)

a) Định nghĩa: Cho $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$.

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right] = \vec{a} \wedge \vec{b} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right) = \left(a_2b_3 - a_3b_2; a_3b_1 - a_1b_3; a_1b_2 - a_2b_1\right)$$

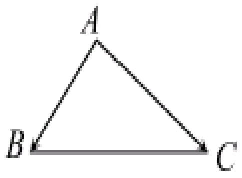
Chú ý: Tích có hướng của hai vectơ là một vectơ, tích vô hướng của hai vectơ là một số.

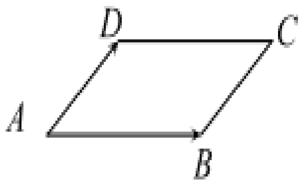
b) Tính chất:

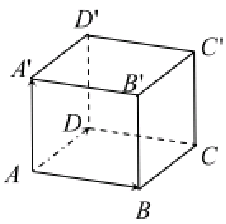
- $\left[\vec{i},\vec{j}\right] = \vec{k}$; $\left[\vec{j},\vec{k}\right] = \vec{i}$; $\left[\vec{k},\vec{i}\right] = \vec{j}$
- $[\vec{a}, \vec{b}] \perp \vec{a}$; $[\vec{a}, \vec{b}] \perp \vec{b}$
- $\left|[\vec{a},\vec{b}]\right| = |\vec{a}|.|\vec{b}|.\sin\left(\vec{a},\vec{b}\right)$
- $\vec{a}, \vec{b}$ cùng phương $\Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{b}] = \vec{0}$

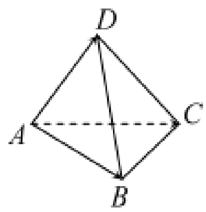
c) Ứng dụng của tích có hướng:

- **Điều kiện đồng phẳng của ba vectơ:** $\vec{a}, \vec{b}$ và $\vec{c}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{b}].\vec{c} = 0$
- **Diện tích hình bình hành ABCD:** $S_{\square ABCD} = \left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right]\right|$
- **Diện tích tam giác ABC:** $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\right|$
- **Thể tích khối hộp ABCD.A′B′C′D′:** $V_{ABCD.A'B'C'D'} = \left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}].\overrightarrow{AA'}\right|$
- **Thể tích tứ diện ABCD:** $V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}].\overrightarrow{AD}\right|$









Chú ý:

– **Tích vô hướng** của hai vectơ thường sử dụng để chứng minh hai đường thẳng vuông góc, tính góc giữa hai đường thẳng.

– **Tích có hướng** của hai vectơ thường sử dụng để tính diện tích tam giác; tính thể tích khối tứ diện, thể tích hình hộp; chứng minh các vectơ đồng phẳng – không đồng phẳng, chứng minh các vectơ cùng phương.

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b} = 0$$
$$\vec{a} \text{ và } \vec{b} \textit{ cùng phương} \Leftrightarrow \left[\vec{a},\vec{b}\right] = \vec{0}$$
$$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ đồng phẳng } \Leftrightarrow \left[\vec{a},\vec{b}\right].\vec{c} = 0$$

5. Phương trình mặt cầu:

- Phương trình mặt cầu (S) tâm I(a; b; c), bán kính R:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$$

- Phương trình $x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0$ với $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$ là phương trình mặt cầu tâm I(–a; –b; –c) và bán kính R = $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$.

VẤN ĐỀ 1: Các phép toán về toạ độ của vectơ và của điểm

– Sử dụng các công thức về toạ độ của vectơ và của điểm trong không gian.

– Sử dụng các phép toán về vectơ trong không gian.

Bài 1. Viết tọa độ của các vectơ sau đây:

$\vec{a} = -2\vec{i} + \vec{j}$; $\vec{b} = 7\vec{i} - 8\vec{k}$; $\vec{c} = -9\vec{k}$; $\vec{d} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 5\vec{k}$

Bài 2. Viết dưới dạng $x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ mỗi vectơ sau đây:

$\vec{a} = \left(0; \frac{1}{\sqrt{2}}; 2\right)$; $\vec{b} = (4; -5; 0)$; $\vec{c} = \left(\frac{4}{3}; 0; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$; $\vec{d} = \left(\pi; \frac{1}{3}; \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$

Bài 3. Cho: $\vec{a} = (2; -5; 3)$, $\vec{b} = (0; 2; -1)$, $\vec{c} = (1; 7; 2)$. Tìm toạ độ của các vectơ $\vec{u}$ với:

a) $\vec{u} = 4\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + 3\vec{c}$ b) $\vec{u} = \vec{a} - 4\vec{b} - 2\vec{c}$ c) $\vec{u} = -4\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{c}$

d) $\vec{u} = 3\vec{a} - \vec{b} + 5\vec{c}$ e) $\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{4}{3}\vec{b} - 2\vec{c}$ f) $\vec{u} = \vec{a} - \frac{3}{4}\vec{b} - \frac{2}{3}\vec{c}$

Bài 4. Tìm tọa độ của vectơ $\vec{x}$, biết rằng:

a) $\vec{a} + \vec{x} = \vec{0}$ với $\vec{a} = (1; -2; 1)$ b) $\vec{a} + \vec{x} = 4\vec{a}$ với $\vec{a} = (0; -2; 1)$

c) $\vec{a} + 2\vec{x} = \vec{b}$ với $\vec{a} = (5; 4; -1)$, $\vec{b} = (2; -5; 3)$

Bài 5. Cho $\vec{a} = (1; -3; 4)$.

a) Tìm y và z để $\vec{b} = (2; y; z)$ cùng phương với $\vec{a}$.

b) Tìm toạ độ của vectơ $\vec{c}$, biết rằng $\vec{a}$ và $\vec{c}$ ngược hướng và $|\vec{c}| = 2|\vec{a}|$.

Bài 6. Cho ba vectơ $\vec{a} = (1; -1; 1)$, $\vec{b} = (4; 0; -1)$, $\vec{c} = (3; 2; -1)$. Tìm:

a) $(\vec{a}.\vec{b})\vec{c}$ b) $\vec{a}^2(\vec{b}.\vec{c})$ c) $\vec{a}^2\vec{b} + \vec{b}^2\vec{c} + \vec{c}^2\vec{a}$

d) $3\vec{a} - 2(\vec{a}.\vec{b})\vec{b} + \vec{c}^2\vec{b}$ e) $4\vec{a}.\vec{c} + \vec{b}^2 - 5\vec{c}^2$

Bài 7. Tính góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$:

a) $\vec{a} = (4; 3; 1)$, $\vec{b} = (-1; 2; 3)$ b) $\vec{a} = (2; 5; 4)$, $\vec{b} = (6; 0; -3)$

c) $\vec{a} = (2; 1; -2)$, $\vec{b} = (0; -\sqrt{2}; \sqrt{2})$ d) $\vec{a} = (3; 2; 2\sqrt{3})$, $\vec{b} = (\sqrt{3}; 2\sqrt{3}; -1)$

e) $\vec{a} = (-4; 2; 4)$, $\vec{b} = (2\sqrt{2}; -2\sqrt{2}; 0)$ f) $\vec{a} = (3; -2; 1)$, $\vec{b} = (2; 1; -1)$

Bài 8. Tìm vectơ $\vec{u}$, biết rằng:

a) $\begin{cases} \vec{a} = (2; -1; 3),\ \vec{b} = (1; -3; 2),\ \vec{c} = (3; 2; -4) \\ \vec{a}.\vec{u} = -5, \quad \vec{u}.\vec{b} = -11, \quad \vec{u}.\vec{c} = 20 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \vec{a} = (2; 3; -1),\ \vec{b} = (1; -2; 3), \vec{c} = (2; -1; 1) \\ \vec{u} \perp \vec{a}, \quad \vec{u} \perp \vec{b}, \quad \vec{u}.\vec{c} = -6 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \vec{a} = (2; 3; 1), \vec{b} = (1; -2; -1), \vec{c} = (-2; 4; 3) \\ \vec{a}.\vec{u} = 3, \quad \vec{b}.\vec{u} = 4, \quad \vec{c}.\vec{u} = 2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} \vec{a} = (5; -3; 2), \vec{b} = (1; 4; -3), \vec{c} = (-3; 2; 4) \\ \vec{a}.\vec{u} = 16, \quad \vec{b}.\vec{u} = 9, \quad \vec{c}.\vec{u} = -4 \end{cases}$

e) $\begin{cases} \vec{a} = (7; 2; 3), \vec{b} = (4; 3; -5), \vec{c} = (1; 1; -1) \\ \vec{a}.\vec{u} = -5, \quad \vec{b}.\vec{u} = -7, \quad \vec{c} \perp \vec{u} \end{cases}$

Bài 9. Cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$. Tìm m để:

a) $\begin{cases} \vec{a} = (2; 1; -2),\ \vec{b} = (0; -\sqrt{2}; \sqrt{2}) \\ \vec{u} = 2\vec{a} + 3m\vec{b} \ \textit{vaø}\ \vec{v} = m\vec{a} - \vec{b} \ \textit{vuoâng goùc} \end{cases}$

b) $\begin{cases} \vec{a} = (3; -2; 1),\ \vec{b} = (2; 1; -1) \\ \vec{u} = m\vec{a} - 3\vec{b} \ \textit{vaø}\ \vec{v} = 3\vec{a} + 2m\vec{b} \ \textit{vuoâng goùc} \end{cases}$

c) $\begin{cases} \vec{a} = (3; -2; 1),\ \vec{b} = (2; 1; -1) \\ \vec{u} = m\vec{a} - 3\vec{b} \ \textit{vaø}\ \vec{v} = 3\vec{a} + 2m\vec{b} \ \textit{cuøng phöông} \end{cases}$

Bài 10. Cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$. Tính X, Y khi biết:

a) $\begin{cases} |\vec{a}| = 4,\ |\vec{b}| = 6 \\ X = |\vec{a} - \vec{b}| \end{cases}$ b) $\begin{cases} \vec{a} = (2;-1;-2),\ |\vec{b}| = 6,\ |\vec{a} - \vec{b}| = 4 \\ Y = |\vec{a} + \vec{b}| \end{cases}$

c) $\begin{cases} |\vec{a}| = 4,\ |\vec{b}| = 6,\ \left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 120^0 \\ X = |\vec{a} - \vec{b}|,\ Y = |\vec{a} + \vec{b}| \end{cases}$ d) $\begin{cases} \vec{a} = (2;-1;-2),\ |\vec{b}| = 6,\ \left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 60^0 \\ X = |\vec{a} - \vec{b}|, Y = |\vec{a} + \vec{b}| \end{cases}$

Bài 11. Cho ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Tìm m, n để $\vec{c} = \left[\vec{a}, \vec{b}\right]$:

a) $\vec{a} = (3;-1;-2),\ \vec{b} = (1;2;m),\ \vec{c} = (5;1;7)$

b) $\vec{a} = (6;-2;m),\ \vec{b} = (5;n;-3),\ \vec{c} = (6;33;10)$

c) $\vec{a} = (2;3;1),\ \vec{b} = (5;6;4),\ \vec{c} = (m;n;1)$

VẤN ĐỀ 2: Xác định điểm trong không gian. Chứng minh tính chất hình học. Diện tích – Thể tích.

– Sử dụng các công thức về toạ độ của vectơ và của điểm trong không gian.
– Sử dụng các phép toán về vectơ trong không gian.
– Công thức xác định toạ độ của các điểm đặc biệt.
– Tính chất hình học của các điểm đặc biệt:

- A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ cùng phương $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB} = k\,\overrightarrow{AC}$
- ABCD là hình bình hành $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

Bài 1. Cho điểm M. Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm M:

- Trên các mặt phẳng tọa độ: Oxy, Oxz, Oyz
- Trên các trục tọa độ: Ox, Oy, Oz

a) $M(1;2;3)$ b) $M(3;-1;2)$

Bài 2. Cho điểm M. Tìm tọa độ của điểm M′ đối xứng với điểm M:

- Qua gốc toạ độ
- Qua mp(Oxy)
- Qua trục Oy

a) $M(1;2;3)$

Bài 3. Xét tính thẳng hàng của các bộ ba điểm sau:

a) $A(1;3;1), B(0;1;2), C(0;0;1)$ b) $A(1;1;1), B(-4;3;1), C(-9;5;1)$

Bài 4. Cho tam giac ABC.

- Tìm toạ độ trọng tâm G của ΔABC.
- Xác định điểm D sao cho ABCD là hình bình hành.

a) $A(1;2;-3), B(0;3;7), C(12;5;0)$ b) $A(0;13;21), B(11;-23;17), C(1;0;19)$

Bài 5. Trên trục Oy (Ox), tìm điểm cách đều hai điểm:

a) $A(3;1;0)$, $B(-2;4;1)$ b) $A(1;-2;1), B(11;0;7)$ c) $A(4;1;4), B(0;7;-4)$

Bài 6. Trên mặt phẳng Oxy (Oxz, Oyz), tìm điểm cách đều ba điểm:

a) $A(1;1;1), B(-1;1;0), C(3;1;-1)$ b) $A(-3;2;4), B(0;0;7), C(-5;3;3)$

Bài 7. Cho hai điểm A, B. Đường thẳng AB cắt mặt phẳng (Oyz) tại điểm M.

- Tìm toạ độ điểm M.

a) $A(2;-1;7),\ B(4;5;-2)$ b) $A(4;3;-2), B(2;-1;1)$ c) $A(10;9;12), B(-20;3;4)$

Bài 8. Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'.

- Tìm toạ độ các đỉnh còn lại.

a) $A(1;0;1), B(2;1;2), D(1;-1;1), C'(4;5;-5)$ b) $A(2;5;-3), B(1;0;0), C(3;0;-2), A'(-3;-1;2)$

VẤN ĐỀ 3: Phương trình mặt cầu

Để viết phương trình mặt cầu (S), ta cần xác định **tâm I** và **bán kính R** của mặt cầu.

Dạng 1: (S) có tâm I(a; b; c) và bán kính R:

$$\textbf{(S):}\ (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$$

Dạng 2: (S) có tâm I(a; b; c) và đi qua điểm A:

Khi đó bán kính R = IA.

Dạng 3: (S) nhận đoạn thẳng AB cho trước làm đường kính:

– Tâm I là trung điểm của đoạn thẳng AB: $x_I=\dfrac{x_A+x_B}{2};\ y_I=\dfrac{y_A+y_B}{2};\ z_I=\dfrac{z_A+z_B}{2}$.

– Bán kính R = IA = $\dfrac{AB}{2}$.

Dạng 4: (S) đi qua bốn điểm A, B, C, D (mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD):

– Giả sử phương trình mặt cầu (S) có dạng: $x^2+y^2+z^2+2ax+2by+2cz+d=0$ (*).

– Thay lần lượt toạ độ của các điểm A, B, C, D vào (*), ta được 4 phương trình.

– Giải hệ phương trình đó, ta tìm được a, b, c, d $\Rightarrow$ Phương trình mặt cầu (S).

Dạng 5: (S) đi qua ba điểm A, B, C và có tâm I nằm trên mặt phẳng (P) cho trước:

Giải tương tự như dạng 4.

Dạng 6: (S) có tâm I và tiếp xúc với mặt cầu (T) cho trước:

– Xác định tâm J và bán kính R' của mặt cầu (T).

– Sử dụng điều kiện tiếp xúc của hai mặt cầu để tính bán kính R của mặt cầu (S).

(Xét hai trường hợp tiếp xúc trong và tiếp xúc ngoài)

Chú ý: Với phương trình mặt cầu (S):

$x^2+y^2+z^2+2ax+2by+2cz+d=0$ với $a^2+b^2+c^2-d>0$

thì (S) có tâm I(–a; –b; –c) và bán kính R = $\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$.

Bài 1. Tìm tâm và bán kính của các mặt cầu sau:

a) $x^2+y^2+z^2-8x+2y+1=0$ b) $x^2+y^2+z^2+4x+8y-2z-4=0$

c) $x^2+y^2+z^2-2x-4y+4z=0$ d) $x^2+y^2+z^2-6x+4y-2z-86=0$

e) $x^2+y^2+z^2-12x+4y-6z+24=0$ f) $x^2+y^2+z^2-6x-12y+12z+72=0$

g) $x^2+y^2+z^2-8x+4y+2z-4=0$ h) $x^2+y^2+z^2-3x+4y=0$

i) $3x^2+3y^2+3z^2+6x-3y+15z-2=0$ k) $x^2+y^2+z^2-6x+2y-2z+10=0$

Bài 2. Viết phương trình mặt cầu có tâm I và bán kính R:

a) $I(1;-3;5),\ R=\sqrt{3}$ b) $I(5;-3;7),\ R=2$ c) $I(1;-3;2),\ R=5$ d) $I(2;4;-3),\ R=3$

Bài 3. Viết phương trình mặt cầu có tâm I và đi qua điểm A:

a) $I(2;4;-1),\ A(5;2;3)$ b) $I(0;3;-2),\ A(0;0;0)$ c) $I(3;-2;1),\ A(2;1;-3)$

d) $I(4;-4;-2),\ A(0;0;0)$ e) $I(4;-1;2),\ A(1;-2;-4)$

Bài 4. Viết phương trình mặt cầu có đường kính AB, với:

a) $A(2;4;-1),\ B(5;2;3)$ b) $A(0;3;-2),\ B(2;4;-1)$ c) $A(3;-2;1),\ B(2;1;-3)$

d) $A(4;-3;-3),\ B(2;1;5)$ e) $A(2;-3;5),\ B(4;1;-3)$ f) $A(6;2;-5),\ B(-4;0;7)$

Bài 5. Viết phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD, với:

a) $A(1;1;0),\ B(0;2;1),\ C(1;0;2),\ D(1;1;1)$ b) $A(2;0;0),\ B(0;4;0),\ C(0;0;6),\ D(2;4;6)$

Bài 6. Viết phương trình mặt cầu đi qua ba điểm A, B, C và có tâm nằm trong mặt phẳng (P) cho trước, với:

a) $\begin{cases} A(1;2;0), B(-1;1;3), C(2;0;-1) \\ (P) \equiv (Oxz) \end{cases}$ b) $\begin{cases} A(2;0;1), B(1;3;2), C(3;2;0) \\ (P) \equiv (Oxy) \end{cases}$

Bài 7. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I và tiếp xúc với mặt cầu (T), với:

a) $\begin{cases} I(-5;1;1) \\ (T): x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z+5=0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} I(-3;2;2) \\ (T): x^2+y^2+z^2-2x+4y-8z+5=0 \end{cases}$